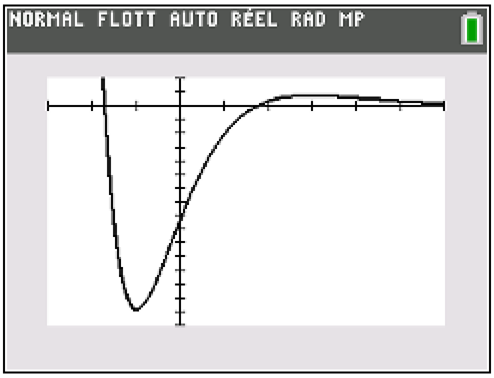
DM 03 1ère Spé maths Lundi 28 Avril 2024 **Gr Thiaude**

<u>Exercice 1</u> [10 pts] à la recherche du minimum absolu

Pour tout réel x, $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+1}$, on admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan :



1. Étudier le signe de $f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser le tableau de variation de f.

3. a. Par lecture du tableau de variation déterminer le minimum m de f sur $]-\infty; 3]$.

b. Donner le signe de m puis justifier que : $\forall x \in]3; +\infty[, m < f(x)$.

c. Déduire de **a.** et **b.** le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 2</u> [10 pts] un peu de trigonométrie

Pour tous réels a et b, on note M l'image de a et N l'image de b sur le cercle trigonométrique. On admet que : $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = a - b\ [2\pi]$.

1. Donner sans justification les coordonnées de O, M et N.

En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$.

2. En exprimant de deux manières différentes $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}$, montrer que :

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

3. Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Comparer avec la valeur obtenue à la calculatrice.

Corrigé

Exercice 1

Pour tout réel x, $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+1}$, on admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. **Étudier le signe de $f(x)$**

   Pour tout réel a, $e^a > 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x+1} > 0$ par conséquent le signe de $f(x)$ est celui de $x^2 - 3$. Or, $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

   Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

   On en déduit :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2 - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. **Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser le tableau de variation de f.**

   $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+1}$

   Rappel : $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$ et $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$

   $u(x) = x^2 - 3$ $\qquad$ $v(x) = e^{-x+1}$

   $u'(x) = 2x$ $\qquad$ $v'(x) = -e^{-x+1}$

   Attention
   La rédaction « $u = x^2 - 3$ » etc. est **gravement fausse** !

   $f'(x) = 2x \times e^{-x+1} + (-e^{-x+1}) \times (x^2 - 3)$

   $f'(x) = 2xe^{-x+1} - e^{-x+1}(x^2 - 3)$

   $f'(x) = e^{-x+1}[2x - (x^2 - 3)]$

   $f'(x) = e^{-x+1}(2x - x^2 + 3)$

   $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x+1}}$

   Or, pour tout réel x, $e^{-x+1} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 + 2x + 3$.

   $-x^2 + 2x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = 3$, de discriminant :

   $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(3) = 4 + 12 = 16.$

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-2 + 4}{-2} = -1$$

   On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Sens de variation de f		$\searrow$	$-2e^2$	$\nearrow$	$6e^{-2}$	$\searrow$	

   $f(-1) = ((-1)^2 - 3)e^{-(-1)+1} = (1 - 3)e^{1+1} = -2e^2, f(3) = (3^2 - 3)e^{-3+1} = 6e^{-2}$

3. a. **Par lecture du tableau de variation déterminer le minimum m de f sur $]-\infty; 3]$.**

   D'après le tableau de variation : le minimum de f sur $]-\infty; 3]$ est $-2e^2$ donc : $m = -2e^2$.

   b. **Donner le signe de m puis justifier que : $\forall x \in]3; +\infty[, m < f(x)$.**

   $-2 < 0$ et $e^2 > 0$ donc : $-2e^2 < 0$, autrement dit : $\boldsymbol{m < 0}$.

   Soit $x > 3$, on a : $3 > \sqrt{3}$ donc $x > \sqrt{3}$, or le signe de $f(x)$ obtenu à la question **1.** montre que sur $]3; +\infty[$ on a : $f(x) > 0$, donc : $\forall x \in]3; +\infty[, f(x) > 0$.

   Pour tout $x \in]3; +\infty[$, on a : $m < 0 < f(x)$ donc en particulier : $m < f(x)$.

   Conclusion : $\boldsymbol{\forall x \in]3; +\infty[, m < f(x)}$.

   c. **Déduire de a. et b. le minimum de f sur $\mathbb{R}$.**

   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : si $x < 3$, alors $m \leqslant f(x)$ et si $x > 3$ alors $m < f(x)$, donc : $m \leqslant f(x)$.

   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant f(x)$ et $m = f(-1)$, donc : **le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est m.**

<u>Exercice 2</u> **Un peu de trigonométrie**

Pour tous réels a et b on note M l'image de a, N l'image de b sur le cercle trigonométrique et on admet que $\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right) = a - b\ [2\pi]$.

1. Donner sans justification les coordonnées de O, M et N, en déduire les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_M - x_O \\ y_M - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) - 0 \\ \sin(a) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ON}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_N - x_O \\ y_N - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(b) - 0 \\ \sin(b) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$

<u>Résumons</u> :

$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}}$

2. En exprimant de deux manières différentes $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}$, montrer que :

$$\boldsymbol{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

• d'une part, en appliquant la définition du produit scalaire de deux vecteurs non nuls, on a :

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{ON}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = 1 \times 1 \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$$

• d'autre part, en utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé :

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = x_{\overrightarrow{ON}} \times x_{\overrightarrow{OM}} + y_{\overrightarrow{ON}} \times y_{\overrightarrow{OM}} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

En regardant les deux expressions de $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}$, on en déduit :

$$\boldsymbol{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}\ (*)$$

3. Déterminer cos $\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, comparer avec la calculatrice.

On a : $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

Donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Or, en posant $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$ dans la formule obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3 \times 2} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

La calculatrice obtient la même valeur :